# 7. INTEGRALES DE SUPERFICIE

## 7.4. Teorema de Stokes

Hasta ahora, se han considerado superficies orientables sin borde (esfera, toro, ...) y sin borde (semiesfera, triángulo, ...), concepto que ahora se definirá con detalle.

### Superficies con borde

Una **superficie** $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice que es **orientada con borde** si admite una parametrización $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, que es inyectiva en $D$, y se llama **borde** de $S$ a la curva $\partial S = \Phi(\partial D)$.

Si la curva cerrada $\partial D \subset \mathbb{R}^2$ se orienta positivamente, y $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización con esa orientación, entonces $\Phi \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización del borde $\partial S$ que le da una **orientación positiva o coherente** con la de $S$ (dada por el vector normal asociado a $\Phi$).

Si $S$ es una superficie orientada con borde $\partial S$, la orientación del borde coherente con la de la superficie se puede caracterizar *informalmente* como aquella en la que : "Al andar sobre el borde con el vector normal a la superficie apuntando a la cabeza, la superficie queda a la izquierda".

### Teorema de Stokes

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, inyectiva en $D$. Si $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, entonces:

$$\oint_{\partial S} F\, ds = \iint_S \operatorname{rot} F\, d\sigma$$

donde la orientación de $\partial S$ es coherente con la de $S$.

### Observaciones

**1.** El teorema de Stokes afirma que la circulación de un campo vectorial a lo largo del borde de la superficie $S$ coincide con el flujo de su rotacional a través de $S$.

**2.** El teorema de Stokes es cierto para superficies más generales como, por ejemplo, aquellas que se pueden descomponer en un número finito de superficies como la del enunciado.

**3.** El teorema de Stokes es una generalización del Teorema de Green.

**4.** Cuando se quiere calcular la integral de un campo vectorial $F$ sobre la superficie $S$ parametrizada por $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, con la orientación del vector $\mathbf{m}$ (que puede o no coincidir con la orientación que da a la superficie el vector $\mathbf{n}$ asociado a $\Phi$: $\mathbf{m} = \pm\mathbf{n}$), se recurre a la integral de superficie del campo escalar resultante de proyectar $F$ sobre $\mathbf{m}$:

$$\iint_S F\, d\sigma = \iint_S F \cdot \mathbf{m}\, d\sigma = \iint_S F \cdot \mathbf{m}\, (\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du\, dv$$

### Ejemplos

**1.** Comprueba que se verifica el teorema de Stokes para el campo vectorial $F(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y la superficie $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0\}$.

**2.** Utiliza el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea de la función vectorial $F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ a lo largo de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$, orientada en el sentido positivo de su proyección sobre el plano $z = 0$.

**3.** Usa el teorema de Stokes para hallar

$$I = \iint_S \operatorname{rot} F\, d\sigma$$

donde $F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$ y $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 1\}$.

**4.** Utiliza el teorema de Stokes para hallar

$$I = \oint_{\gamma} (x+y)\,dx + (2x-z)\,dy + (y+z)\,dz$$

donde $\gamma$ es el borde del triángulo de vértices $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,6)$, con la orientación $ABCA$.

## Campos conservativos en el espacio

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto convexo, y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces:

$$F \text{ es campo conservativo en } \Omega \iff \operatorname{rot} F = \mathbf{0} \text{ en } \Omega$$

## Ejemplo

Estudia si es conservativo el campo $F(x,y,z) = (y,\, z\cos yz + x,\, y\cos yz)$. En caso afirmativo, calcula una función potencial.

## Ejercicios

**1.** Comprueba que se verifica el teorema de Stokes para la función $F(x,y,z) = (z,x,y)$ y el helicoide $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

**2.** Calcula $\iint_S \operatorname{rot} F\, d\sigma$ en los siguientes casos:

**(a)** $F(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^2y^2\mathbf{k}$, y $S$ la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 3$, $z \le 0$.

**(b)** $F(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, y $S = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\, x+y+z \ge 1\big\}$.

**3.** Usa el teorema de Stokes para calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y,z) = (x^2, 2xy+x, z)$ a lo largo de la curva $\gamma = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1,\, z = 2\big\}$.

**4.** Estudia si es conservativo el campo vectorial $F(x,y,z) = (2xyz + \sin x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. En caso afirmativo, halla una función potencial y la integral de $F$ sobre la curva $\gamma$ parametrizada por $\alpha(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \le t \le \pi$.

## Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

**1.** Se calcula la integral del rotacional de $F$ sobre la superficie, y la integral de $F$ sobre su frontera. En ambos casos, se obtiene el valor $\pi$.
**2. (a)** $-6\pi$; **(b)** $\frac{-4\pi}{\sqrt{3}}$.
**3.** $\pi$.
**4.** Es conservativo con función potencial: $f(x,y,z) = x^2yz - \cos x + k$, $k \in \mathbb{R}$. La integral es 0.